

LEKCJA 2

Przykład: Dylemat Cykora (albo Poker Drogowy)

Dwie osoby wsiadają w samochody, rozpędzają się i z dużą prędkością jadą na siebie - ten kto pierwszy zahamuje lub zjedzie z trasy jest "cykorem" i przegrywa. Skręcając wcześniej nic nie możemy zyskać w porównaniu z czekaniem na ostatnią chwilę, za to jeśli przeciwnik planował skręcić chwilę później możemy stracić.

	Jechać	Uciec
Jechać	-1, -1	10, 0
Uciec	0, 10	5, 5

Gra ma dwie równowagi Nasha (obie optymalne Pareto) - pierwszy gracz jedzie, drugi ucieka oraz drugi gracz jedzie, pierwszy ucieka.

W przeciwieństwie do Dylematu Więźnia najgorsza nie jest sytuacja asymetryczna (jeden jedzie, drugi ucieka), ale symetryczna (obu jedzie na siebie). Jeśli koszty honorowe były by większe od kosztów wypadku gra zmienia się w zwykły dylemat więźnia.

W sytuacjach rzeczywistych które modeluje gra w cykora najbardziej opłacalna jest "strategia szaleńca" - trzeba przekonać przeciwnika że nie myśli się racjonalnie i zamierza się jechać bez względu na okoliczności. Właśnie taka jest interpretacja pewnych pozornie irracjonalnych zachowań społecznych.

Strategie mieszane

Strategia czysta – gracz wybiera bez losowania jedną konkretną strategię.

Strategia mieszana – gracz wybiera strategię z pewnym prawdopodobieństwem (czyli w sposób losowy). Strategia taka polega na wykonaniu losowania, po czym podejmuje się decyzję zależnie od wyniku losowania. Szczególnym przypadkiem jest strategia czysta z prawdopodobieństwem 100%.

Nie każda gra ma rozwiązanie w zbiorze strategii czystych. Czysta strategia optymalna zapewnia najwyższą wypłatę spośród wszystkich strategii, także mieszanych. Dopiero gdy czystych strategii nie ma, trzeba szukać optymalnych strategii mieszanych.

Twierdzenie o istnieniu NE (J. Nash, 1950):

Każda skończona gra zawsze ma przynajmniej jedną równowagę Nash'a (niekoniecznie w strategiach czystych).

Gra skończona – gra ze skończonym zbiorem graczy i strategii.

W przypadku braku równowagi Nasha w strategiach czystych, gracze są niepewni co do wyboru strategii przez innych graczy gdyż nie obserwujemy ich prywatnych informacji. Niepewność np. gracza I przedstawiamy za pomocą mieszanej strategii gracza II. Ideą strategii mieszanych jest pokazanie graczowi którą ze strategii czystych inni gracze (przeciwnicy) będą bardziej preferować.

Przykład: Orzeł i Reszka

Każdy z graczy wybiera stronę monety i jeśli obaj wybiorą to samo {O,O} lub {R,R}, to monetę wygrywa gracz II, a jeśli co innego {O,R} lub {R,O}, to gracz I wygrywa.

	Reszka r	Orzeł $1-r$
Reszka q	-1, 1	1, -1
Orzeł $1-q$	1, -1	-1, 1

Żadna para strategii czystych w tej grze nie spełnia warunków równowagi Nasha. W dowolnej grze, w której gracze próbują zgadywać ruch przeciwnika (czyli gry o sumie zerowej takie jak poker, piłka nożna, bitwa, itd.), jest brak równowagi Nasha w strategiach czystych. Przyczyną jest występowanie dużej niepewności co do ruchu graczy.

Obie strategie każdego gracza są jednakowo niebezpieczne. Czy można zapewnić sobie wypłatę wyższą od tej najgorszej z możliwych? Tak, pod warunkiem że (1) zdamy się na los i (2) wypłatę będziemy traktować jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej.

- q - prawdopodobieństwo zagrania R przez gracza I $0 \leq q \leq 1$
- $(1-q)$ - prawdopodobieństwo zagrania O przez gracza I
- $(q, 1-q)$ – strategia mieszana (dystrybucja prawdopodobieństwa)
- R, O - strategie czyste

jeśli $q = 0 \Rightarrow$ strategia mieszana $(0, 1)$ jest strategią czystą O

jeśli $q = 1 \Rightarrow$ strategia mieszana $(1, 0)$ jest strategią czystą R

Założmy że gracz I wie że gracz II zagra R z prawdopodobieństwem r
O z prawdopodobieństwem $(1-r)$
czyli gracz I wie że gracz II zagra strategią mieszaną $(r, 1-r)$.

↓

Oczekiwana wypłata gracza I: $r(-1) + (1-r)1 = 1-2r$

$$r1 + (1-r)(-1) = 2r-1$$

↓

$$1-2r > 2r-1 \text{ if } r < 0.5$$

↓

Najlepsza odpowiedź gracza I w strategiach czystych:

R jeśli $r < 0.5$

O jeśli $r > 0.5$

obojętnie pomiędzy R i O jeśli $r = 0.5$

↓

Oczekiwana wypłata gracza I z tytułu zagrania $(q, 1-q)$ gdy gracz II zagra $(r, 1-r)$:

$$r(-1)q + (1-r)1q = q(1-2r)$$

$$r1(1-q) + (1-r)(-1)(1-q) = q(1-2r) + 2r-1$$

↓

Najlepsza odpowiedź gracza I (w strategiach czystych lub mieszanych):

R jeśli $r < 0.5$ (czyli $q=1$)

O jeśli $r > 0.5$ (czyli $q=0$)

Rozwiązanie: Istnieje tylko jedna NE w tej grze

jeśli gracz I zagra $(0.5R, 0.5O)$

↓

$(0.5, 0.5)$ jest najlepszą odpowiedzią dla gracza II

Taka równowaga Nasha w strategiach mieszanych NIE musi oznaczać losowego wyboru strategii (możemy, na przykład, postanowić zawsze pokazywać tylko reszkę). Raczej interpretujemy strategię mieszaną gracza II jako oświadczenie niepewności gracza I odnośnie wyboru przez gracza II strategii czystej.

Rzucając symetryczną monetę i wybierając to co wypadnie, gracz I zapewnia sobie oczekiwaną wypłatę równą zero.



Żadna inna strategia nie gwarantuje wyższej oczekiwanej wypłaty.

Szkic obliczenia równowagi w strategiach mieszanych:

	L r	P $1-r$
W q	a,b	c,d
N $1-q$	e,f	g,h

Para strategii mieszanych $(q, 1-q)$ gracza I i $(r, 1-r)$ gracza II jest równowagą Nasha jeśli:

$$\begin{aligned} ra + (1-r)c &= re + (1-r)g \\ qb + (1-q)f &= qd + (1-q)h \end{aligned}$$

Własności strategii mieszanej:

1. Strategie mieszane nie występują w strategiach ściśle zdominowanych, czyli strategie ściśle zdominowane nie mogą być częścią strategii mieszanej.

Przykład:

	A q	B r	C $1-q-r$
G	1, 0	1, 2	0, 1
D	0, 3	0, 1	2, 0

Strategią mieszaną dla gracza II jest dystrybucja prawdopodobieństwa $(q, r, 1-q-r)$, gdzie $0 \leq q \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq q+r \leq 1$. Jak zwykle, czyste strategie graczy są szczególnym przypadkiem strategii mieszanych graczy, czyli $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,0,0)$, itd.

Strategia C jest zdominowana przez B \Rightarrow można wyeliminować C \Rightarrow D jest zdominowana przez G \Rightarrow A jest zdominowana przez B \Rightarrow jedyna NE w tej grze [G,B]

2. Dana strategia czysta może być ściśle zdominowana przez strategię mieszaną (nawet jeśli strategia czysta nie jest ściśle zdominowana przez inną strategię czystą).

Przykład:

	A q	B r	C $1-q-r$
G	1, 0	1, 2	0, 1
D	0, 3	0, 0	2, 1

Strategia czysta C jest zdominowana przez strategię mieszaną A i B (np. $q=2/5$, $r=3/5$), ponieważ oczekiwana wypłata z AB jest większa niż z C \Rightarrow można wyeliminować C \Rightarrow D jest zdominowana przez G \Rightarrow A jest zdominowana przez B \Rightarrow jedyna NE w tej grze [G,B]

3. Jeżeli pewna strategia czysta danego gracza jest zdominowana, to każda strategia mieszaną (z dodatnim prawdopodobieństwem) tej strategii czystej również jest zdominowana.

4. Strategia czysta, która nie jest najlepszą odpowiedzią na żadną strategię czystą pozostałych graczy, może być najlepszą odpowiedzią na pewną strategię mieszaną pozostałych graczy.

Przykład:

	A	B	C
G p	1, 2	1, 0	0, 3
D $1-p$	0, 2	0, 3	2, 0

Strategia A gracza II jest najlepszą odpowiedzią na strategię mieszaną $[0,5;0,5]$ gracza I

5. Jeśli istnieje najlepsza odpowiedź gracza w strategiach mieszanych (z pośród wszystkich dostępnych strategii czystych), to każda strategia czysta tego gracza daje taką samą oczekiwaną wypłatę.

6. Jeśli gracz we wszystkich strategiach czystych ma jednakową oczekiwaną wypłatę, to strategie mieszane mogą mimo wszystko mieć różne prawdopodobieństwa.